Garet - Kurtzmann, p. 307
Rivoirard - Stoltz, p. 25-26

Lemme : Soit $u, z \in \mathbb{C}$ tels que $|u|, |z| \leq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Alors $|z^n - u^n| \leq n |z-u|$.

$$|z^n - u^n| = \left|(z-u)\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right| \leq |z-u| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|z|^k}_{\leq 1} \underbrace{|u|^{n-1-k}}_{\leq 1} \leq n|z-u|.$$

Théorème (TCL) : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r iid admettant un moment d'ordre 2.
Soit $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1^2)$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Alors $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - E(X_1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Notons $m = E(X_1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\sum_{k=1}^n (X_k - m)}_{=: S_n}$ et $X_1 - m, \dots, X_n - m$ sont iid.

Par indépendance, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = E\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum(X_k - m)}\right) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k - m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$

Montrons que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} = \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)$.

Puisque $X_1 - m$ a un moment d'ordre 2, ϕ_{X_1-m} est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver 2 fois sous l'espérance :

- $\phi'_{X_1-m}(x) = E\left[\left(e^{ix(X_1-m)}\right)'\right] = iE\left[(X_1-m)e^{ix(X_1-m)}\right] \Rightarrow \phi'_{X_1-m}(0) = iE[X_1 - m] = 0$
- $\phi''_{X_1-m}(x) = E\left[\left(e^{ix(X_1-m)}\right)''\right] = -E\left[(X_1-m)^2 e^{ix(X_1-m)}\right] \Rightarrow \phi''_{X_1-m}(0) = -E\left[(X_1-m)^2\right] = -\sigma^2$

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0,

$$\phi_{X_1-m}(x) = \underbrace{\phi_{X_1-m}(0)}_{=1} + \underbrace{\phi'_{X_1-m}(0)}_{=0}x + \underbrace{\phi''_{X_1-m}(0)}_{=-\sigma^2}\frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + o(x^2)$$

Pour n assez grand, on a donc $\phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

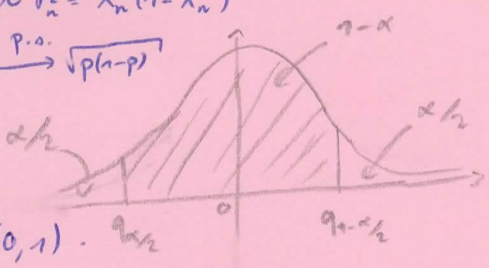
Donc $\left|\phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \underbrace{\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right)^n}_{= e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}}\right| \leq n\left|\phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right|$ car $|\phi_{X_1-m}(x)| \leq E\left(\left|e^{ix(X_1-m)}\right|\right) = 1$

$$= n\, o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{\phi_{X_1-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n}_{= \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)} \longrightarrow \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)$.

Par le théorème de Lévy, on a donc $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}(\overline{X}_n - m) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Application : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de réalisations de va iid de $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0,1[$ est inconnu.
On souhaite estimer p. Alors $\left[\overline{X}_n \pm q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ où $\alpha \in]0,1[$, $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de $\mathcal{N}(0,1)$ et $\hat{\sigma}_n^2 = \overline{X}_n(1-\overline{X}_n)$.



- Par la loi forte des grands nombres, $\overline{X}_n \xrightarrow{p.s.} E(X_1) = p$. Donc $\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)} = \sqrt{\hat{\sigma}_n^2} \xrightarrow{p.s.} \sqrt{p(1-p)}$ par continuité de $x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ sur $\mathbb{R}_+$. D'où $\sqrt{\hat{\sigma}_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \sqrt{p(1-p)}$.
- Par le TCL, $\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

$\Rightarrow$ Par le lemme de Slutsky, $\sqrt{\frac{n}{\hat{\sigma}_n^2}}(\overline{X}_n - p) = \underbrace{\sqrt{\frac{p(1-p)}{\hat{\sigma}_n^2}}}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} 1} \times \underbrace{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}}}_{\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

théorème de Portmanteau

Ainsi, par continuité de $F_{\mathcal{N}(0,1)}$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(q_{\alpha/2} \leq \sqrt{\frac{n}{\hat{\sigma}_n^2}}(\overline{X}_n - p) \leq q_{1-\alpha/2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(q_{\alpha/2} \leq \mathcal{N}(0,1) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$.

Or, $q_{\alpha/2} = -q_{1-\alpha/2}$ donc $\mathbb{P}\left(q_{\alpha/2} \leq \sqrt{\frac{n}{\hat{\sigma}_n^2}}(\overline{X}_n - p) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = \mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X}_n \pm q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_n^2}{n}}\right]\right)$.